



## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência  
Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição  
Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial  
Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

# Estatística II

Aulas 1 & 2

**Nelson Faustino**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Faculdade de Economia (FEUC)  
Universidade de Coimbra – Portugal

[nelson@fe.uc.pt](mailto:nelson@fe.uc.pt)

## Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
SoftwareRevisão de  
Estatística IFunção de  
DistribuiçãoValor Esperado:  
Média, Variância e  
FGMDistribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial NegativaExercícios  
Extra-AulaImplementação  
em R**1** Apresentação

- Docência
- Bibliografia e Software

**2** Revisão de Estatística I

- Função de Distribuição
- Valor Esperado: Média, Variância e FGM

**3** Distribuições Discretas

- Uniforme Discreta
- Bernoulli e Binomial
- Geométrica e Binomial Negativa

**4** Exercícios Extra-Aula**5** Implementação em R

# Conteúdos

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

## 1 Apresentação

- Docência
- Bibliografia e Software

## 2 Revisão de Estatística I

- Função de Distribuição
- Valor Esperado: Média, Variância e FGM

## 3 Distribuições Discretas

- Uniforme Discreta
- Bernoulli e Binomial
- Geométrica e Binomial Negativa

## 4 Exercícios Extra-Aula

## 5 Implementação em R

## Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

### Aulas Presenciais

- 3as. feiras, 14:30–16:00
- 5as. feiras, 9:00–10:30

### Horários de Atendimento

- 3as. feiras, 16:00–17:30
- 4as. feiras, 14:30–16:00
- 5as. feiras, 10:30–12:00

- Os **atendimentos às 4as. feiras** serão tendencialmente realizados por via remota. Requerem agendamento via e-mail ([nelson@fe.uc.pt](mailto:nelson@fe.uc.pt)).
- Para realizar eventuais ajustes no horário de atendimento, pedia que respondessem ao inquérito, disponível a partir do link abaixo.

Link Google Forms: <https://forms.gle/CDBZTnrLye4hQb7u8>

# Bibliografia Base

Para além dos textos a serem disponibilizados no UC Student

## Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e Software

Revisão de Estatística I

Função de Distribuição

Valor Esperado: Média, Variância e FGM

Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e Binomial Negativa

Exercícios Extra-Aula

Implementação em R

## Biblioteca da FEUC (CDU 519.2)

- **Empréstimo Curto:** dois (2) exemplares;
- **Empréstimo Livre:** oito (8) exemplares.



Murteira, B., C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta, F. Pimenta (2015), **Introdução à Estatística, 3ª Edição**, Escolar Editora.



# Programa da Disciplina

Temas vs. capítulos do livro

## Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

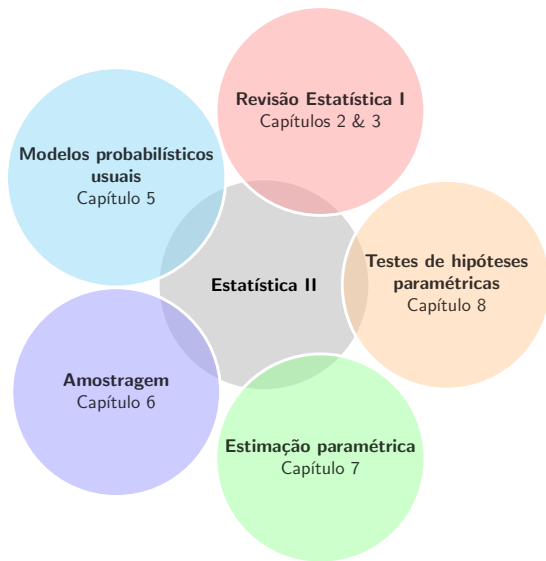
Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R



# Software R

## Links para instalação



- **R:** Instalar o software, disponível em <https://www.r-project.org/>;
- **RStudio:** Instalar o editor de R [e Python], disponível em <https://www.rstudio.com/>.

### Estatística II

N. Faustino

#### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

#### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

#### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

#### Exercícios Extra-Aula

#### Implementação em R

# Conteúdos

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

- 1 Apresentação
  - Docência
  - Bibliografia e Software
- 2 Revisão de Estatística I
  - Função de Distribuição
  - Valor Esperado: Média, Variância e FGM
- 3 Distribuições Discretas
  - Uniforme Discreta
  - Bernoulli e Binomial
  - Geométrica e Binomial Negativa
- 4 Exercícios Extra-Aula
- 5 Implementação em R



# Função de distribuição

Subseção 3.2 do livro [Murteira et al. (2015)]

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

## Definição 3.2 Função de distribuição

A função real de variável real  $F_X$ , com domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

designa-se por função de distribuição da variável aleatória  $X$ .

**Notação:** Iremos considerar notação  $F$  ao invés de  $F_X$  por uma questão de simplicidade.

## Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Propriedades da função de distribuição:

Para qualquer função de distribuição,  $F$ , tem-se:

**1**  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

**2**  $F$  é não decrescente:  $\Delta x > 0 \implies F(x) \leq F(x + \Delta x)$ .

**3**  $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

**4**  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ , quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  a verificar  $b > a$ .

**5**  $F$  é contínua à direita:  $F(a^+) := \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ .

**6**  $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$ , com  $F(a^-) := \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$ , qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ .

# Função de distribuição

Subseção 3.2 do livro [Murteira et al. (2015)]

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

#### Função de Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

## Mais propriedades:

Para qualquer função de distribuição,  $F$ , tem-se:

- 1  $P(X < b) = F(b^-)$ ;
- 2  $P(X > a) = 1 - F(a)$ ;
- 3  $P(X \geq a) = 1 - F(a^-)$ ;
- 4  $P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$ ;
- 5  $P(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$ ;
- 6  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$ .



# Classificação das variáveis aleatórias

Subseção 3.3 do livro [Murteira et al. (2015)]

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Classificação de variáveis aleatórias

Seja  $X$  uma variável aleatória e

$D = \{x : P(X = x) = F(x) - F(x^-) > 0\}$  o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $F$ .

- 1 Variáveis aleatórias discretas:**  $D$  é um conjunto enumerável de pontos e

$$P(X \in D) := \sum_{x \in D} P(X = x) = 1$$

- 2 Variáveis aleatórias contínuas:**  $D = \emptyset$  (i.e.  $D$  não admite descontinuidades), e se existe uma função real de variável real  $f$ , não negativa ( $f(x) \geq 0$ ), tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

# Variáveis aleatórias discretas

Envolvem manipulação de sucessões, somas e séries numéricas  
(Matemática II)

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência  
Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Função de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & , (x \in D) \\ 0 & , (x \notin D) \end{cases}$$

Nos casos em que  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (conjunto finito) ou  $D = \{x_1, x_2, \dots\}$  (conjunto infinito) corresponde a um **conjunto ordenado de pontos** ( $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ):

- $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i);$
- $F(x_i^-) = F(x_{i-1}) \implies f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

# Variáveis aleatórias contínuas

Envolvem manipulação de funções, integrais definidos e integrais impróprios (Matemática I)

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência  
Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial  
Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Função Densidade de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & , (\text{nos pontos onde existe derivada}) \\ 0 & , (\text{nos outros pontos}) \end{cases}$$

$$\blacksquare F(+\infty) = 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\blacksquare \text{Continuidade de } F \implies P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Adicionalmente:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq a).$$

# Valor Esperado

subseção 3.5 do livro [Murteira et al. (2015)]

## Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

$$E(\psi(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in D} \psi(x)f(x) & (X \text{ é v.a. discreta}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)f(x)dx & (X \text{ é v.a. contínua}) \end{cases}$$

define o valor esperado de  $\psi(X)$ , desde que:

■ **v.a. discreta** – soma/série  $\sum_{x \in D} |\psi(x)|f(x)$  é convergente.

■ **v.a. contínua** – integral impróprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|f(x)dx$  é convergente.

### Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

**Média da v.a.  $X$  ( $\psi(X) = X$ )**

$$\mu = E(X).$$

**Variância da v.a.  $X$  ( $\psi(X) = (X - E(X))^2$ )**

$$V(X) = E((X - \mu)^2), \text{ sendo } \mu = E(X).$$

**Função geradora de momentos da v.a.  $X$  ( $\psi(X) = e^{sX}$ )**

Função real de variável real, definida por

$$M(s) = E(e^{sX}).$$



# Função Geradora de Momentos

Função Geradora de Momentos (FGM) vs. Momentos de ordem  $k$

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Propriedades

- Momentos de ordem  $k$  da v.a.  $X$

$$\mu'_k = E(X^k)$$

- Momentos de ordem 1 e 2 variância da v.a.  $X$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- FGM vs momentos de ordem  $k$

$$M(s) = E(e^{sX}) \implies M^{(k)}(0) = E(X^k).$$

# Conteúdos

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

- 1 Apresentação
  - Docência
  - Bibliografia e Software
- 2 Revisão de Estatística I
  - Função de Distribuição
  - Valor Esperado: Média, Variância e FGM
- 3 Distribuições Discretas
  - Uniforme Discreta
  - Bernoulli e Binomial
  - Geométrica e Binomial Negativa
- 4 Exercícios Extra-Aula
- 5 Implementação em R

# Distribuição Uniforme Discreta

## Principais características

### Estatística II

N. Faustino

#### Apresentação

Docência  
 Bibliografia e  
 Software

#### Revisão de Estatística I

Função de  
 Distribuição  
 Valor Esperado:  
 Média, Variância e  
 FGM

#### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
 Bernoulli e Binomial  
 Geométrica e  
 Binomial Negativa

#### Exercícios Extra-Aula

Implementação  
 em R

### Função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \\ 0 & (x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \end{cases}$$

### Principais características

- **Média da população:**  $E(X) = \bar{x}$ , sendo  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

- **Variância da população:**  $V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n-1}{n} \bar{s}^2$ ,

sendo  $\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

# Distribuição Uniforme Discreta

Implementação em R

## Comandos R

- **length** – número de elementos de  $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .
- **med** – média da amostra,  $\bar{x}$ .
- **var** – variância da amostra,  $\bar{s}^2$ .

## Calcular $E(X)$ e $V(X)$ em R

```
> x<-1:10
> mean(x)
[1] 5.5
> mean((x-mean(x))^2)
[1] 8.25
> var(x)
[1] 9.166667
> (length(x)-1)/length(x)*var(x)
[1] 8.25
```

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

# Distribuição Binomial

Permite-nos descrever provas de Bernoulli ( $n = 1$ ) ou uma sucessão de  $n$  provas de Bernoulli independentes ( $n > 1$ )

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Função de probabilidade ( $X \sim B(n, \theta)$ )

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, & (x = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$$

## Principais características

- **FGM:**  $M(s) = (1 - \theta + \theta e^s)^n$
- **Média:**  $E(X) = n\theta$ , sendo  $n\theta = M'(0)$ .
- **Variância:**  $V(X) = n\theta(1 - \theta)$ , sendo  $n\theta(1 - \theta) = M''(0) - (M'(0))^2$ .

### Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

### Dados do item 3.a)

- **Variável aleatória  $X$ :** Número de afinações em 40 períodos de 30 mins. ( $20 \text{ horas} \times 2$ ).
- **Distribuição de Probabilidade:**  $X \sim B(40, 0,05)$ .

### Resolução 3.a)

$$E(X) = 40 \times 0.05 = 2$$

(usei a propriedade  $E(X) = n\theta$   
para distribuições  $X \sim B(n, \theta)$ ).

### Resolução em R

```
> nX<-20*2
> theta<-0.05
> nX*theta
[1] 2
```

# Exercícios Resolvidos

Exercício 3., página 326

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Dados do Problema 3.b)

- **Distribuição de Probabilidade:**  $Y \sim B(16, 0.05)$  descreve a distribuição do número de afinações em 8 horas de trabalho (16 períodos de 30 mins.).

## Resolução 3b)

$$\begin{aligned}P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y < 1) \\ &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - (0.95)^{16} \\ &= 0.5598733\end{aligned}$$

Obs:  $P(Y = y) = \binom{16}{y} (0.05)^y (0.95)^{16-y}$ .

## Resolução em R

### Resolução 1

```
> 1-(1-theta)^16
```

```
[1] 0.5598733
```

### Resolução 2

```
> 1-dbinom(0,16,0.05)
```

```
[1] 0.5598733
```

### Resolução 3

```
> pbinom(0, 16, .05,
```

```
lower.tail=FALSE)
```

```
[1] 0.5598733
```

A função **dbinom** retorna o **valor da função de probabilidade da distribuição binomial** para um determinado valor da variável aleatória **x**, número de tentativas (**size**) e a probabilidade de sucesso em cada tentativa (**prob**). A sintaxe para usar **dbinom** é a seguinte:

- **dbinom(x, size, prob)** caso pretenda calcular

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

- **dbinom(a:b, size, prob)** caso pretenda gerar o vector de dimensão  $b - a + 1$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x = a, \dots, b$$

(**size=n**; **prob=θ**;  $a, b - n^{os}$  inteiros;  $0 \leq a < b$ ).



A função **pbinom** retorna o **valor da função de densidade de probabilidade da distribuição binomial** para um determinado valor da variável aleatória **q**, número de tentativas (**size**) e a probabilidade de sucesso em cada tentativa (**prob**). A sintaxe para usar **pbinom** é a seguinte:

- **pbinom(q, size, prob)** caso pretenda calcular  $P(Q \leq q) = F(q)$ ,  $Q \sim B(size, prob)$
- **pbinom(q, size, prob, lower.tail=FALSE)** caso pretenda calcular  $P(Q > q) = 1 - F(q)$ ,  $Q \sim B(size, prob)$ .

### Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

### Resolução 3b) usando comando `dbinom`

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5)$$

**Obs:** A soma acima calcula-se com recurso aos comandos **`dbinom`** e **`sum`** – `sum(dbinom(2:5, 16, 0.05))`.

### Resolução 3b) usando comando `pbinom`

$$P(2 \leq Y \leq 5) = P(Y \leq 5) - P(Y < 2)$$

**Obs:**  $P(Y \leq 5)$  resp.  $P(Y < 2) = P(Y \leq 1)$  calcula-se com recurso ao comando `pbinom(5, 16, 0.05)` resp. `pbinom(1, 16, 0.05)`.

### Dados do Exercício 8.a):

- **Variável aleatória  $X$ :** Número de parafusos defeituosos.
- **Distribuição de Probabilidade:**  $X \sim B(12, 0.01)$ , sendo  $n = 12$  o número de unidades em cada caixa, e  $\theta = 0.01$  a probabilidade de o parafuso ser defeituoso.

### Resolução 8.a) em R

- **Calcular diretamente  $P(X \geq 2) = P(X > 1)$ :**  
`> pbinom(1, 12, 0.01, lower.tail=FALSE)`  
`[1] 0.006174538`
- **Calcular  $P(X \geq 2)$  com recurso à propriedade  $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$ :**  
`> 1-pbinom(1,12,0.01)`  
`[1] 0.006174538`

# Exercícios Resolvidos

Exercício 8, página 327

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

## Dados do Exercício 8.b):

- **Variável aleatória  $Y$ :** Número de caixas, em dez (10), com dois (2) ou mais parafusos defeituosos.
- **Distribuição de Probabilidade:**  $Y \sim B(10, P(X \geq 2))$ , sendo  $n = 10$  o número caixas, e  $\theta = P(X \geq 2)$  a probabilidade de uma caixa possuir dois (2) ou mais parafusos defeituosos.

## Probabilidade pedida em 8.b)

$$P(Y \geq 1) = P(Y > 0) = ?$$

## Resolução 8.b) em R

```
> prob8a<-pbinom(1, 12, .01, lower.tail=FALSE)
> pbinom(0, 10, prob8a, lower.tail=FALSE)
[1] 0.0600577
```

### Dados do Exercício 27:

- **Variável aleatória  $X$ :** Número de pessoas, em 3000, com tratamento de doença dispendioso.
- **Distribuição de Probabilidade:**  $X \sim B(3000, 1/5000)$ , sendo  $n = 3000$  o  $n^\circ$  de apólices [de seguro], e  $\theta = 1/5000$  a probabilidade de doença ter tratamento dispendioso.

### Probabilidades pedidas em cada item

- $P(X = 0)$  dá-nos a probabilidade de nenhuma das pessoas seguradas contrair a doença (pode ser calculada usando o comando **dbinom** ou **pbinom**).
- A probabilidade condicional  $P(X \leq 3 | X \geq 1)$  dá-nos a probabilidade de não se verificarem mais de três (3) participações ( $X \leq 3$ ) até ao final do ano, assumindo que já foi realizada uma (1) participação.

### Lembrete para resolução 27. b):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0.$$

### Ideia de resolução

- 1 De  $A = \{X \leq 3\}$  e  $B = \{X \geq 1\}$  segue  $A \cap B = \{1 \leq X \leq 3\}$ .
- 2 Usando as propriedades da **função distribuição discreta**, segue naturalmente a seguinte sequência de igualdades:

$$P(X \leq 3 | X \geq 1) = \frac{P(1 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \leq 3) - P(X < 1)}{1 - P(X < 1)}.$$

**Obs:**  $P(X < 1) = P(X = 0)$  coincide com a probabilidade calculada em **27.a)**.

# Distribuição Binomial Negativa

Permite-nos descrever o número de provas de Bernoulli até obter 1 (distribuição geométrica) ou mais sucessos,  $r$ .

## Função de probabilidade ( $X \sim BN(r, \theta)$ )

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r}, & (x = r, r+1, \dots) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$$

## Principais características

- **FGM:**  $M(s) = \left( \frac{re^s}{1-(1-\theta)e^s} \right)^r$ ,  $s < -\ln(1-\theta)$ .
- **Média:**  $E(X) = \frac{r}{\theta}$ , sendo  $\frac{r}{\theta} = M'(0)$ .
- **Variância:**  $V(X) = \frac{r(1-\theta)}{\theta^2}$ , sendo  $\frac{r(1-\theta)}{\theta^2} = M''(0) - (M'(0))^2$ .

# Síntaxe distribuição geométrica $BN(1, \theta)$

Funções `dgeom/dnbinom` e `pgeom/pnbinom`

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

$$P(X = x) = \theta(1 - \theta)^{x-1} \quad (x = 1, 2, \dots)$$

## Distribuição Geométrica

- **`dgeom(x-1,prob)`** ou **`dnbinom(x-1,1, prob)`** caso pretenda calcular  $P(X = x) = f(x)$ ,  $Q \sim BN(1, prob)$ .
- **`pgeom(q-1, prob)`** ou **`pdnbinom(q,1,prob)`** caso pretenda calcular  $P(Q \leq q) = F(q)$ ,  $Q \sim BN(1, prob)$
- **`pgeom(q-1,1,prob,lower.tail=FALSE)`** ou **`pnbinom(q, prob,lower.tail=FALSE)`** caso pretenda calcular  $P(Q > q) = 1 - F(q)$ ,  $Q \sim BN(size, prob)$ .



# Síntaxe distribuição binomial negativa

 $BN(r, \theta)$ 

Funções `dnbinom` e `pnbinom`

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^{x-r} \quad (x = r, r+1, \dots)$$

## Distribuição Binomial Negativa

- **`dnbinom(x-r,r, prob)`** caso pretenda calcular  $P(X = x) = f(x)$ ,  $Q \sim BN(r, prob)$ .
- **`pnbinom(q-r,r,prob)`** caso pretenda calcular  $P(Q \leq q) = F(q)$ ,  $Q \sim BN(r, prob)$
- **`pnbinom(q-r, prob, lower.tail=FALSE)`** caso pretenda calcular  $P(Q > q) = 1 - F(q)$ ,  $Q \sim BN(r, prob)$ .

### Dados pergunta 5.

- **Variável aleatória  $X$ :** Número de respostas até acertar a primeira.
- **Distribuição de Probabilidade:**  $X \sim BN(1, \theta)$ .

### Resolução em 5.a)

$P(X = 4)$  (probabilidade de acertar a primeira pergunta à quarta (4) tentativa)

```
> theta<-1/5
> x<-4
> theta*(1-theta)^(x-1)
[1] 0.1024
> dgeom(x-1, theta)
[1] 0.1024
```

### Resolução 5.b)

$$E(X) = 5$$

(usei a propriedade  $E(X) = \frac{1}{\theta}$  para distribuições  $X \sim BN(1, \theta)$ .)

```
> 1/theta
[1] 5
```

# Exercícios Resolvidos

Exercício 6, página 327

## Dados pergunta 6

- **Variável aleatória  $X$ :** Número de lançamentos até obter três (3) faces.
- **Distribuição de Probabilidade:**  $X \sim BN(3, 1/2)$ .

## Resolução em 6.

$P(X = 7)$  (**probabilidade de obter terceira face (3) após sete (7) lançamentos**) calculada computacionalmente de duas formas distintas:

```
> theta<-1/2
> x<-7
> r<-3
> dnbinom(x-r,r,theta)
[1] 0.1171875
> choose(x-1,r-1)*theta^r*(1-theta)^(x-r)
[1] 0.1171875
```

# Conteúdos

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

- 1 Apresentação
  - Docência
  - Bibliografia e Software
- 2 Revisão de Estatística I
  - Função de Distribuição
  - Valor Esperado: Média, Variância e FGM
- 3 Distribuições Discretas
  - Uniforme Discreta
  - Bernoulli e Binomial
  - Geométrica e Binomial Negativa
- 4 Exercícios Extra-Aula
- 5 Implementação em R

# Exercícios Propostos

## Revisão de Estatística I

### Estatística II

N. Faustino

#### Apresentação

Docência  
Bibliografia e  
Software

#### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição  
Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

#### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial  
Geométrica e  
Binomial Negativa

#### Exercícios Extra-Aula

Implementação  
em R

### Função distribuição vs. função probabilidade

■ págs. 174– 175: 6., 8., 9.

### Função distribuição vs. função densidade de probabilidade

■ págs. 175-177: 13., 14., 19.

### Função geradora de momentos

■ págs. 183-184: 40., 43., 44.



# Exercícios Propostos

## Complemento da Aula 2

### Estatística II

N. Faustino

#### Apresentação

Docência  
Bibliografia e  
Software

#### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição  
Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

#### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial  
Geométrica e  
Binomial Negativa

#### Exercícios Extra-Aula

#### Implementação em R

### Distribuição Binomial

- **pág. 326:** 1., 2., 4.

### Distribuição Geométrica/Binomial Negativa

- **págs. 326-327:** 7., 9., 10.



# Conteúdos

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta

Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

- 1 Apresentação
  - Docência
  - Bibliografia e Software
- 2 Revisão de Estatística I
  - Função de Distribuição
  - Valor Esperado: Média, Variância e FGM
- 3 Distribuições Discretas
  - Uniforme Discreta
  - Bernoulli e Binomial
  - Geométrica e Binomial Negativa
- 4 Exercícios Extra-Aula
- 5 Implementação em R

# Desafios Computacionais

Para implementar em R

Estatística II

N. Faustino

Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

Revisão de  
Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

Distribuições  
Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

Exercícios  
Extra-Aula

Implementação  
em R

Seja  $W$  a v.a. que descreve a contagem do número de letras de uma palavra selecionada aleatoriamente da seguinte estrofe do poema *Ode Marítima* de Álvaro de Campos:

”A TODOS OS VENTOS DE TODAS AS LATITUDES E LONGITUDES”.

- 1 Use o comando `<-c()` para criar um vector `w` ordenado, com os valores da v.a.  $W$ , e os comandos `length`, `med` e/ou `var` para determinar **a média e a variância da distribuição uniforme** gerada por `w`.
- 2 Repita o mesmo tipo de procedimento para criar um vector `fw`, correspondente aos valores da função de probabilidade.
- 3 Use a instrução `> Dw<-data.frame(w,fw,w*fw,w^2*fw)` para representar os dados, `> print(rbind(Dw[1],Dw[2]))` para fazer um print da função distribuição, e o comando da forma `> sum(Dw[i])` para calcular a **média e a variância de  $W$** .



# Desafios Computacionais

Para implementar em R

## Estatística II

N. Faustino

### Apresentação

Docência

Bibliografia e  
Software

### Revisão de Estatística I

Função de  
Distribuição

Valor Esperado:  
Média, Variância e  
FGM

### Distribuições Discretas

Uniforme Discreta  
Bernoulli e Binomial

Geométrica e  
Binomial Negativa

### Exercícios Extra-Aula

### Implementação em R

Comece por criar o ficheiro R.script **Binom-Numero.R**, onde **Numero** corresponde ao seu número de estudante.

## Distribuição Binomial

Seja  $X \sim B(n, p)$  uma variável aleatória (v.a.) que contabiliza o número de vezes que sai soma 7 no lançamento de dois dados honestos. Sabe-se ainda que  $E(X) = 138$  e  $V(X) = 51$ .

- 1** Crie instruções que lhe permitam determinar os valores de  $n$  e  $\theta$  a partir dos valores de  $E(X)$  e  $V(X)$ .
- 2** Construa o vector que descreve a função de probabilidade de  $X \sim B(n, \theta)$ .
- 3** Crie instruções que lhe permitam determinar o valor da probabilidade condicional  $P(X < 10 | X > 3)$ .

Comece por criar o ficheiro R.script **NBinom-Numero.R**, onde **Numero** corresponde ao seu número de estudante.

## Distribuição Binomial Negativa

Seja  $Y \sim BN(r, p)$  uma variável aleatória (v.a.) que contabiliza o número de chamadas mensais que um colaborador de uma central de telemarketing precisa de realizar até conseguir obter  $r$  vendas.

Sabe-se ainda que a média de chamadas mensais é de 135, e que 1449 é o valor da variância.

- 1 Crie instruções que lhe permitam determinar os valores de vendas necessárias,  $r$ , assim como a probabilidade  $p$  de conseguir obter uma (1) venda.
- 2 Assumindo que o vendedor já realizou mais de 37 chamadas neste mês, crie instruções que lhe permitam determinar qual a probabilidade de não precisar de realizar mais de 40 chamadas.