

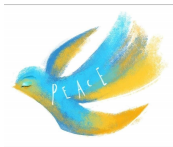
Estatística II

N. Faustino

Distribuições
ContínuasDistribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-StudentPopulações
 $N(\mu, \sigma^2)$ Função Geradora de
Momentos
Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de StudentTeorema do
Limite CentralExercícios
ResolvidosDistribuições
Contínuas
Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

Estatística II

Aulas 11 & 12

Nelson Faustino¹**¹Faculdade de Economia (FEUC)
Universidade de Coimbra – Portugal**nelson@fe.uc.pt

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
ContínuasDistribuição do
Qui-QuadradoDistribuição
t-StudentPopulações
 $N(\mu, \sigma^2)$ Função Geradora de
MomentosDistribuição da
média amostralDistribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite CentralExercícios
ResolvidosDistribuições
ContínuasPopulações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

1 Distribuições Contínuas

- Distribuição do Qui-Quadrado
- Distribuição t-Student

2 Populações $N(\mu, \sigma^2)$

- Função Geradora de Momentos
- Distribuição da média amostral
- Distribuição da variância amostral [corrigida]
- Rácio de Student

3 Teorema do Limite Central**4** Exercícios Resolvidos

- Distribuições Contínuas
- Populações $N(\mu, \sigma^2)$
- Teorema do Limite Central

5 Exercícios Extra-Aula

Conteúdos

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

1 Distribuições Contínuas

- Distribuição do Qui-Quadrado
- Distribuição t-Student

2 Populações $N(\mu, \sigma^2)$

- Função Geradora de Momentos
- Distribuição da média amostral
- Distribuição da variância amostral [corrigida]
- Rácio de Student

3 Teorema do Limite Central

4 Exercícios Resolvidos

- Distribuições Contínuas
- Populações $N(\mu, \sigma^2)$
- Teorema do Limite Central

5 Exercícios Extra-Aula

Função densidade de probabilidade ($X \sim G(\alpha, \lambda)$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (x > 0) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$$

Principais características

- **FGM:** $M(s) = (1 - \frac{s}{\lambda})^{-\alpha}$ ($s < \lambda$).
- **Média:** $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, sendo $\frac{\alpha}{\lambda} = M'(0)$.
- **Variância:** $V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$, sendo $\frac{\alpha}{\lambda^2} = M''(0) - (M'(0))^2$.

Distribuição Gama

Distribuição Exponencial Negativa vs. Distribuição Qui-Quadrado

Estadística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Exponencial Negativa

$(X \sim Ex(\lambda))$

- $Ex(\lambda) = G(1, \lambda)$;
- **Média:** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$;
- **Variância:** $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Qui-quadrado

$(X \sim \chi_k^2)$

- $\chi_k^2 = G(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$;
- **Média:** $E(X) = k$;
- **Variância:** $V(X) = 2k$.

Função Gama

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ tem as seguintes propriedades:

- 1 Fórmula de recorrência:** $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;
- 2 Factorial de um número:** $k! = \Gamma(k + 1)$;
- 3 Relação com π :** $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$.

Distribuição Normal $N(0, 1)$

Relação com a distribuição χ_1^2

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

Mudança de variável

$$z = \sqrt{x} \quad (x \geq 0) \\ \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$Z^2 \sim \chi_1^2$$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} dx \end{aligned}$$

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

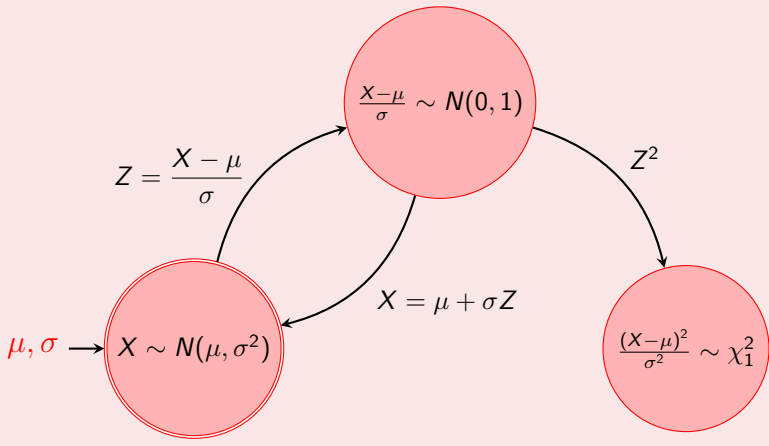
Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

$$N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow N(0, 1) \longrightarrow \chi_1^2$$



Distribuição t-Student

Alternativa à distribuição normal $N(0, 1)$ para amostras de dimensão reduzida

Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

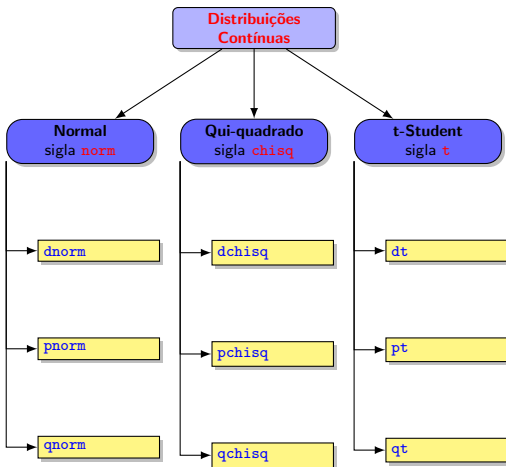
Teorema do Limite

Função densidade de probabilidade ($X \sim t_k$)

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Principais características

- **Média:** $E(X) = 0$;
- **Variância:** $V(X) = \frac{k}{k-2} \quad (k > 2)$.



Distribuição do Qui-Quadrado

Representação Gráfica

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
 Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
 Distribuição da média amostral
 Distribuição da variância amostral [corrigida]
 Rácio de Student

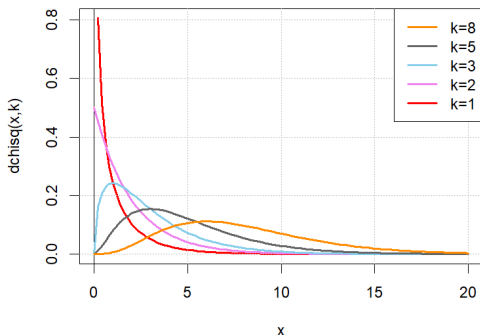
Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
 Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 Teorema do Limite

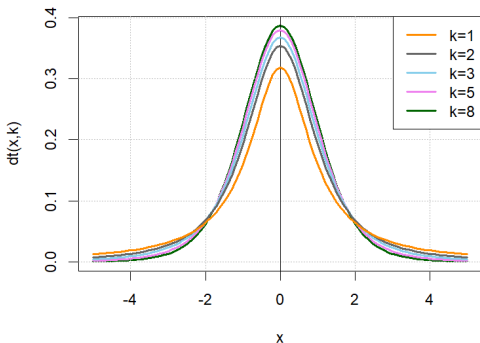
Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.) $X \sim \chi_k^2$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (x > 0)$$



Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.) $X \sim t_k$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$



Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

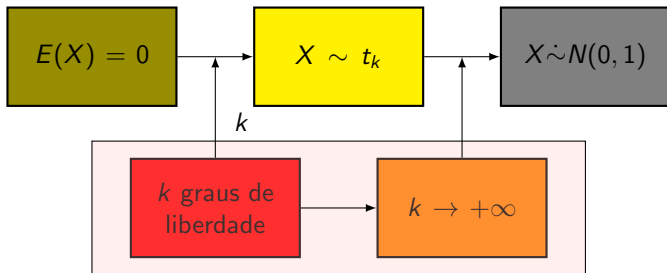
Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite



Notação: $X \sim N(0, 1)$ lê-se X segue assintoticamente uma distribuição normal $N(0, 1)$.

Distribuição t -Student

Convergência para a distribuição normal estandarizada

Limite Notável

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Limite notável para $\Gamma(\alpha)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(\alpha)t^\alpha} = 1$$

Convergência t -Student para $N(0, 1)$ ($t = \frac{k}{2}$ & $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{\frac{k}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cancel{\sqrt{\frac{k}{2}}}}{\cancel{\sqrt{k\pi}} \sqrt{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
 t -Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

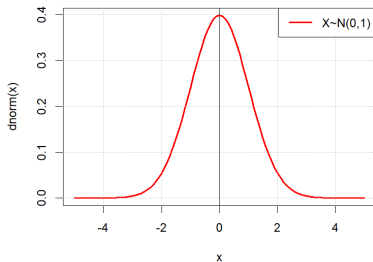
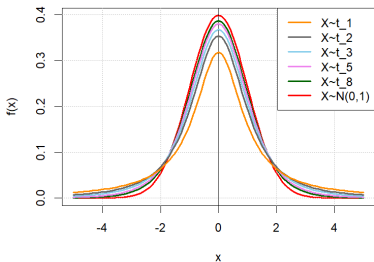
Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Ilustração gráfica da aproximação de t_k por $N(0, 1)$:



Conteúdos

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições
Contínuas

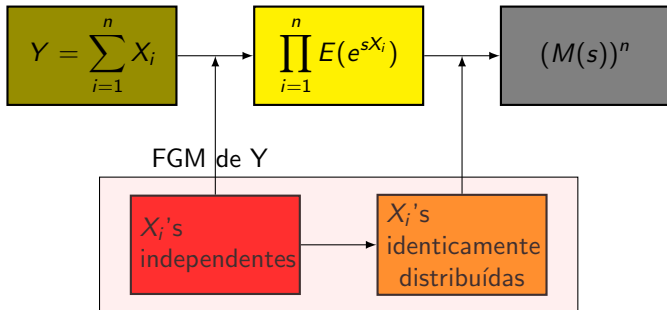
Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

- 1** Distribuições Contínuas
 - Distribuição do Qui-Quadrado
 - Distribuição t-Student
- 2** Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Função Geradora de Momentos
 - Distribuição da média amostral
 - Distribuição da variância amostral [corrigida]
 - Rácio de Student
- 3** Teorema do Limite Central
- 4** Exercícios Resolvidos
 - Distribuições Contínuas
 - Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Teorema do Limite Central
- 5** Exercícios Extra-Aula

Independência de Variáveis Aleatórias (v.a.'s)

Relação com a função geradora de momentos (FGM)



- $M_{X_i}(s) = E(e^{sX_i})$ FGM de X_i & $M_Y(s) = E(e^{sY})$ FGM de Y ;
- **X_i 's são independentes:** $M_Y(s) = \prod_{i=1}^n E(e^{sX_i})$;
- **X_i 's são i.i.d's:** $M_Y(s) = (M(s))^n$, sendo $E(e^{sX_i}) = M(s)$.

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Independência de variáveis aleatórias

Reformulação de resultados de [Murteira et al. (2015), Capítulo 5]

Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

v.a.'s independentes

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

FGM v.a.'s independentes

$$E(e^{sX_i}) = e^{s\mu_i + \frac{\sigma_i^2 s^2}{2}} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\prod_{i=1}^n E(e^{sX_i}) = e^{s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}, \text{ sendo:}$$

$$\blacksquare \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \ \& \ \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \implies \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Independência de variáveis aleatórias

Reformulação de resultados de [Murteira et al. (2015), Capítulo 5]

Estadística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

v.a.'s independentes

$$X_i \sim \chi_{k_i}^2 \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

FGM v.a.'s independentes

$$E(e^{sX_i}) = (1 - 2s)^{-\frac{k_i}{2}} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\prod_{i=1}^n E(e^{sX_i}) = (1 - 2s)^{-\frac{k}{2}}, \text{ sendo:}$$

$$\blacksquare k = \sum_{i=1}^n k_i \implies \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_k^2.$$

Independência de variáveis aleatórias

Reformulação de resultados de [Murteira et al. (2015), Capítulo 5]

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

v.a.'s independentes

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Reformulação dos resultados

- **Qui-quadrado** (χ_n^2):
Teorema 5.9
- $N(0, 1) \rightarrow \chi_1^2$:
Teorema 5.10
- $N(0, 1) \rightarrow \chi_n^2$:
Teorema 5.11

Propriedades de distribuições envolvendo amostras casuais

- $N(0, 1) \rightarrow \chi_1^2$: $\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0, 1) \implies \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_1^2$
- $\chi_1^2 \rightarrow \chi_n^2$: $\frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_1^2 \implies \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_n^2$

Os resultados a ser apresentados envolverão os seguintes estimadores:

■ Média da amostra: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

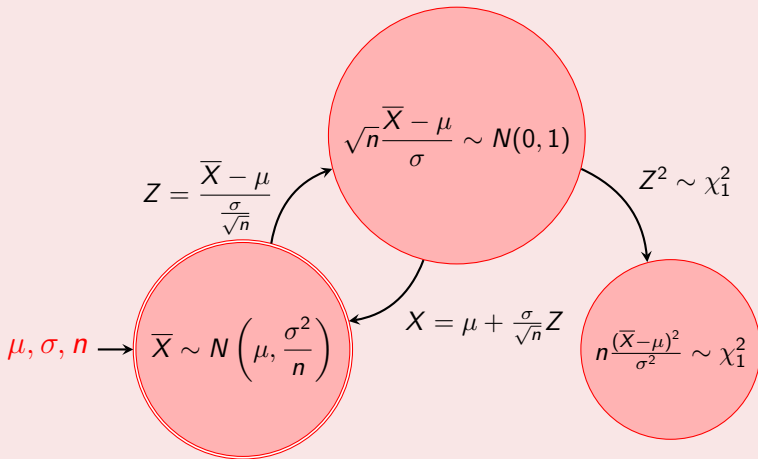
■ Variância da amostra: $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

■ Variância corrigida da amostra: $(S')^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Relação com a distribuição normal estandarizada, $N(0, 1)$, e com a distribuição qui-quadrado [com 1 grau de liberdade]

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightarrow N(0, 1) \rightarrow \chi_1^2$$



Estadística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

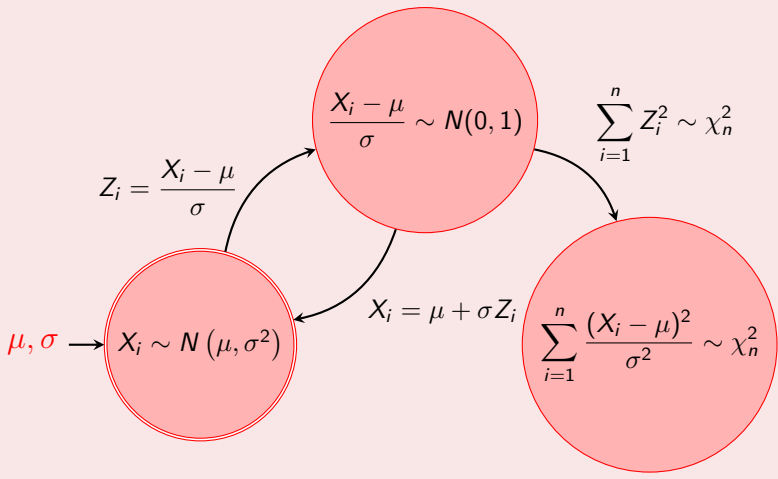
Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$

Relação com a distribuição normal estandarizada, $N(0, 1)$, e com a distribuição qui-quadrado [com n graus de liberdade]

$$N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow N(0, 1) \longrightarrow \chi_n^2$$



Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Variança da Amostra

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos
Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas
Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

Média da Amostra

$$n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

Estimação da Variância

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} &\stackrel{\sim \chi_n^2}{=} \sum_{i=1}^n \frac{((X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu))^2}{\sigma^2} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}}_{= \frac{nS^2}{\sigma^2}} + \underbrace{n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}}_{\sim \chi_1^2} \quad [\text{ao simplificar}] \end{aligned}$$

Variância Corrigida da Amostra

$$\frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

Teorema 6.3

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Consequência

$$\frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$\text{De } (S')^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Rácio de Student

Média vs. Variância da Amostra (\bar{X} vs. S^2)

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Via definição 6.3

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \sim t_k,$$

sempre que $U \sim N(0, 1)$ &
 $V \sim \chi_k^2$.

Escolhas ($k = n - 1$)

$$\blacksquare U = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1);$$

$$\blacksquare V = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

De $\sqrt{\frac{V}{n-1}} = \frac{\sqrt{n} S}{\sqrt{n-1} \sigma}$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} &= \frac{\cancel{\sqrt{n}} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}{\frac{\cancel{\sqrt{n}} S}{\sqrt{n-1} \cancel{\sigma}}} \\ &= \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}. \end{aligned}$$

Rácio de Student

Média vs. Variância Corrigida da Amostra (\bar{X} vs. $(S')^2$)

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Via definição 6.3

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \sim t_k,$$

sempre que $U \sim N(0, 1)$ &
 $V \sim \chi_k^2$.

Escolhas ($k = n - 1$)

- $U = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$;
- $V = \frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

De $\sqrt{\frac{V}{n-1}} = \frac{S'}{\sigma}$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} &= \frac{\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}}{\frac{S'}{\sigma}} \\ &= \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S'} \sim t_{n-1}. \end{aligned}$$

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

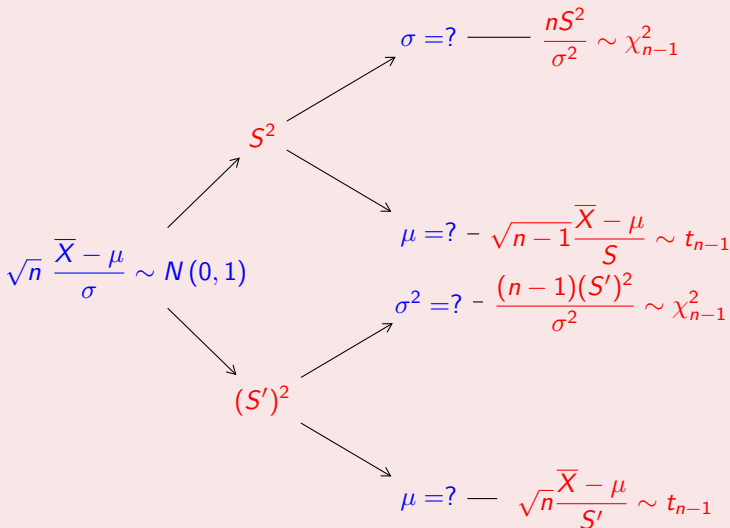
Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite



Populações Normais

Estimadores e Distribuições de Interesse

Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
 Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral
 Distribuição da variância amostral [corrigida]

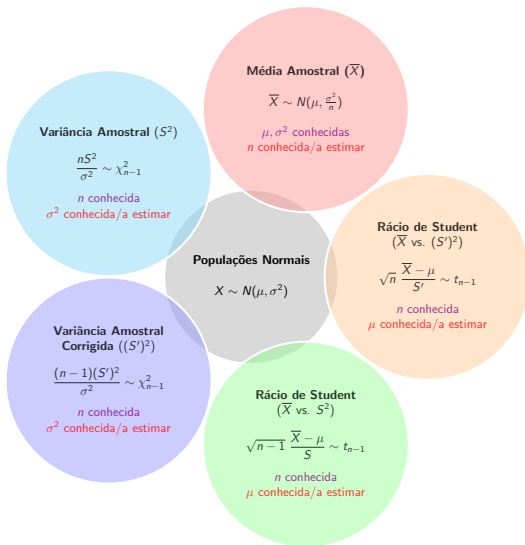
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
 Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite



Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

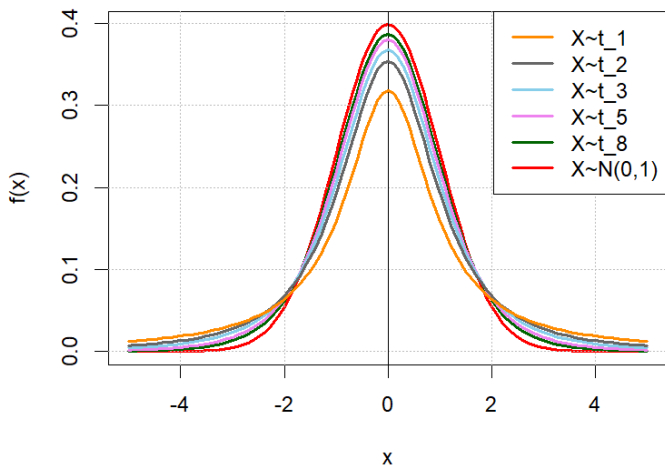
Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

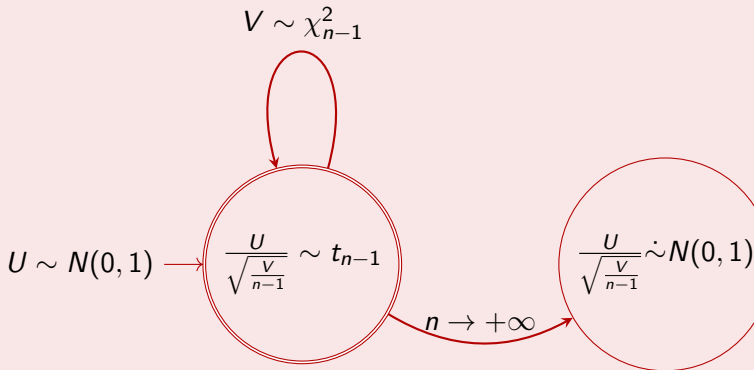
Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite



Aproximações Assintóticas

Rácio de Student

$$t_{n-1} \rightarrow N(0, 1)$$



Empiricamente, o resultado acima verifica-se quando o número de graus de liberdade é elevado (p.e. $n > 20$).

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

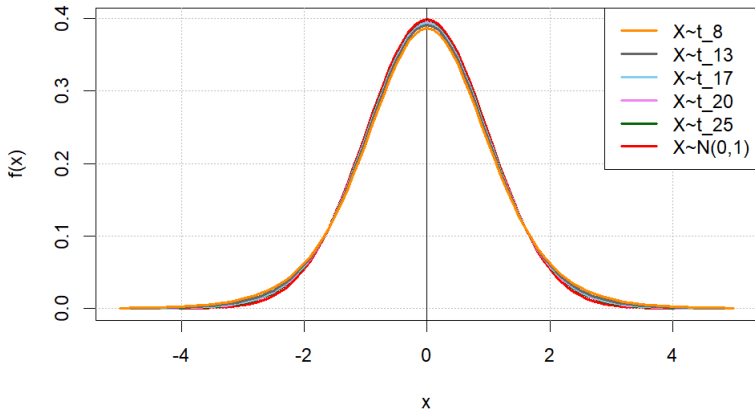
Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite



Aproximações Assintóticas

Rácio de Student

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos
Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas
Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

$$U \sim N(0, 1)$$

$$U = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

$$V \sim \chi_{n-1}^2$$

$$V = \frac{nS^2}{\sigma^2} \text{ ou } V = \frac{(n-1)(S')^2}{\sigma^2}$$

Média vs. Variância da Amostra (\bar{X} vs. S^2)

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim N(0, 1).$$

Média vs. Variância Corrigida da Amostra (\bar{X} vs. $(S')^2$)

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S'} \sim t_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S'} \sim N(0, 1).$$

Conteúdos

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

- 1** Distribuições Contínuas
 - Distribuição do Qui-Quadrado
 - Distribuição t-Student
- 2** Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Função Geradora de Momentos
 - Distribuição da média amostral
 - Distribuição da variância amostral [corrigida]
 - Rácio de Student
- 3** Teorema do Limite Central
- 4** Exercícios Resolvidos
 - Distribuições Contínuas
 - Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Teorema do Limite Central
- 5** Exercícios Extra-Aula

Teorema do Limite Central

Reformulação de [Murteira et al. (2015), Teorema 5.12]

Estadística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

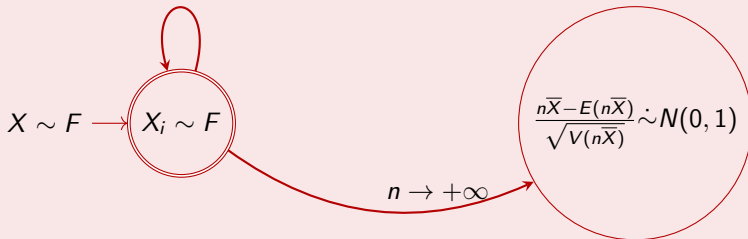
Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

$$X \sim F \rightarrow n\bar{X} \sim N(n\mu^2, n\sigma^2)$$

(X_1, X_2, \dots, X_n) amostra casual



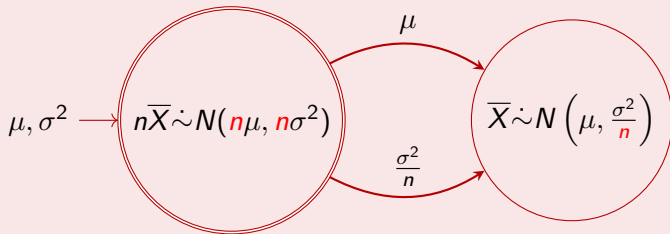
Lembrete:

- $n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$
- $E(n\bar{X}) = n\mu$ & $V(n\bar{X}) = n\sigma^2$.

Teorema do Limite Central

Reformulação de [Murteira et al. (2015), Teorema 5.12]

Distribuição assintótica da média da amostra



Obs:

- $E(\bar{X}) = \mu$ & $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$;
- $\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$.

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Teorema do Limite Central

Amostras casuais envolvendo distribuições discretas

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

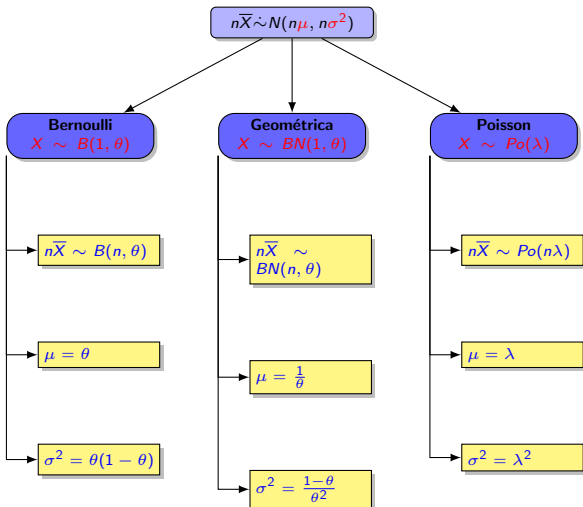
Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite



Teorema do Limite Central

Amostras casuais envolvendo distribuições contínuas

Estadística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

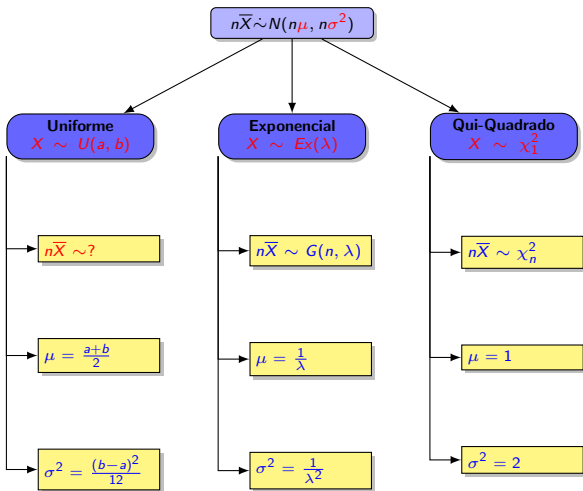
Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

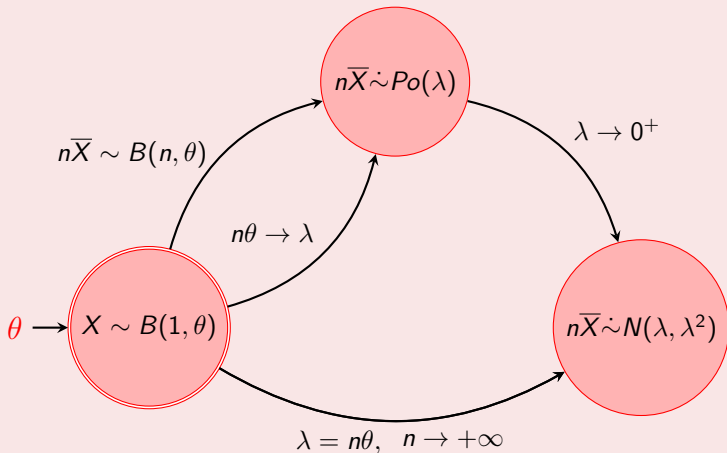
Teorema do Limite



Teorema do Limite Central

Lei dos acontecimentos raros como caso particular

$$B(n, \theta) \rightarrow Po(\lambda) \rightarrow N(\lambda, \lambda^2)$$



Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Conteúdos

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

- 1** Distribuições Contínuas
 - Distribuição do Qui-Quadrado
 - Distribuição t-Student
- 2** Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Função Geradora de Momentos
 - Distribuição da média amostral
 - Distribuição da variância amostral [corrigida]
 - Rácio de Student
- 3** Teorema do Limite Central
- 4** Exercícios Resolvidos
 - Distribuições Contínuas
 - Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Teorema do Limite Central
- 5** Exercícios Extra-Aula

Exercícios Resolvidos

Exercício 58, página 338

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos
Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

58.

$$X \sim \chi_{23}^2$$

58.a)

$$P(14.85 < X < 32.01) = P(X < 32.01) - P(X \leq 14.85)$$

58.a) > pchisq(q,df)

```
> pchisq(32.01,23)-pchisq(14.85,23)
[1] 0.7999933
```


Dados 58. b)

$$P(a < X < b) = 0.95 \text{ \& } P(X < a) = 0.025 \implies a, b = ?$$

Cálculo de a

$$P(X \leq a) = P(X < a) = 0.025 \implies a = q_{0.025}$$

Cálculo de b

$$P(X < b) - P(X \leq a) = P(a < X < b) = 0.95 \\ \text{\& } P(X < a) = 0.025 \implies b = q_{0.975}$$

58.b) > qchisq(p,df)

```
> qchisq(0.025,23)
```

```
[1] 11.68855
```

```
> qchisq(0.975,23)
```

```
[1] 38.07563
```

Exercícios Resolvidos

Exercício 58, página 338

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos
Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]
Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Dados 58. c)

$$E(X) = ? \ \& \ V(X) = ? \implies X \sim \chi_{23}^2$$

Cálculo de $E(X)$ e $V(X)$

$$E(X) = 23 (= k) \ \& \ V(X) = 46 (= 2k).$$

58.d) > qchisq(p,df)

```
> qchisq(0.95,23)
```

```
[1] 35.17246
```

```
> qchisq(0.05,23)
```

```
[1] 13.09051
```

Distribuição do Qui-Quadrado

[Murteira et al. (2015), 58.b), p.338]

Estadística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado

Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

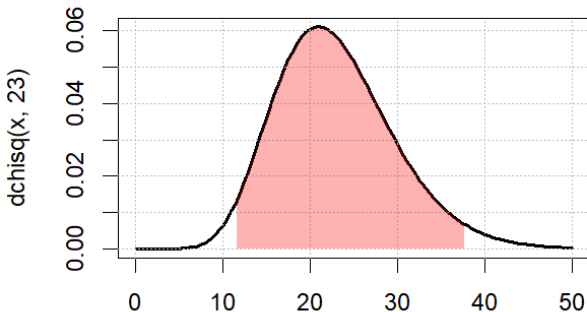
Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

$$P(a < X < b) = 0.95 \text{ \& } P(X < a) = 0.025 \implies a, b = ?$$

Distribuição do Qui-Quadrado (df = 23)



$$qchisq(0.025, 23) < x < qchisq(0.975, 23)$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 33, página 394

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

33.

$$T \sim t_{10}$$

33.a)

$$P(T < a) = 0.05 \implies a = q_{0.05}$$

33.a) > qt(p, df)

$$> \text{qt}(0.05, 10) \\ [1] -1.812461$$

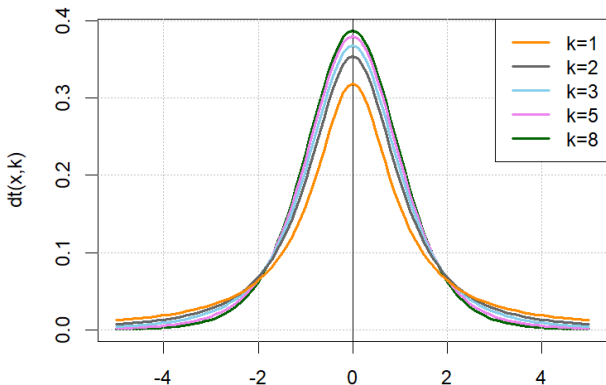
33.b)

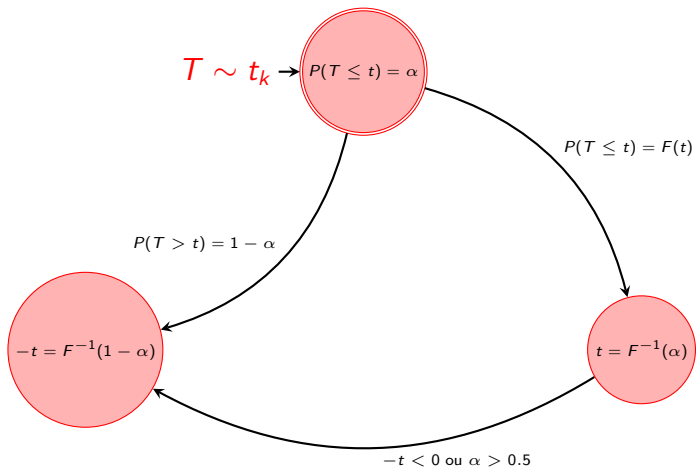
$$P(T < 0.26) = ?$$

33.b) > pt(q, df)

$$> \text{pt}(0.26, 10) \\ [1] 0.5999307$$

$$T \sim t_k : P(T \leq 0) = 0.5 \iff q_{0.5} = 0$$





33.c)

$$P(T > b) = 0.9 \implies b = ?$$

33.c)

$$\underbrace{P(T > b)}_{=1-P(T \leq b)} = 0.90 \iff P(T \leq b) = 0.10$$

$$\implies b = q_{0.10} = -q_{0.90}$$

33.c) > qt(p, df)

$$> -qt(0.90, 10)$$

$$[1] -1.372184$$

$$> qt(0.10, 10)$$

$$[1] -1.372184$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 33, página 394

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

33.d)

$$P(-c < T < c) = 0.95 \implies c = ?$$

33.d)

$$\underbrace{P(-c < T < c)}_{=P(T < c) - P(T \leq -c)} = 0.95 \quad P(T \leq -c) = 1 - P(T < c) \quad \iff \quad 2P(T < c) - 1 = 0.95$$

$$\iff P(T < c) = 0.975$$

$$\implies c = q_{0.975} (= -q_{0.025})$$

33.d) > qt(p, df)

$$> \text{qt}(0.975, 10)$$

$$[1] \quad 2.228139$$

$$> \text{qt}(0.025, 10)$$

$$[1] \quad -2.228139$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 29, página 393

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do

Qui-Quadrado

Distribuição

t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral

Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Amostra Casual Exercício 29

(X_1, X_2, \dots, X_n) de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com $n = 5$ &
 μ, σ^2 – desconhecidos.

Probabilidade Pedida

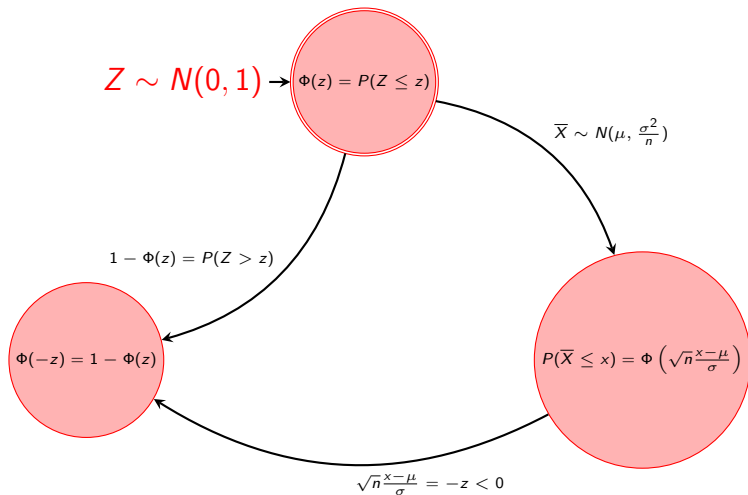
$$P(S < \sigma) = P(S^2 < \sigma^2) = ?$$

Distribuição da Variância da Amostra

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \xrightarrow{n=5} \quad P(S^2 < \sigma^2) = P\left(\frac{5S^2}{\sigma^2} < 5\right)$$

comando R `> pchisq(5, 4)`

Output `[1] 0.7127025`



Exercícios Resolvidos

Exercício 32, página 394

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Amostra Casual Exercício 32. a)

$(X_1, X_2, \dots, X_{16})$ de $X \sim N(60, 9)$ ($\mu = 60, \sigma = 3$ & $n = 16$).

Probabilidade Pedida

$P(\text{'desafinada'}) = P(\bar{X} > 61.1 \vee \bar{X} < 58.9), \quad \bar{X} \sim N\left(60, \left(\frac{3}{4}\right)^2\right).$

Probabilidade Pedida em R > 2*(1-pnorm(4.4/3))

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 61.1 \vee \bar{X} < 58.9) &= P(|\bar{X} - 60| > 1.1) \\ &= 1 - P\left(\frac{|\bar{X} - 60|}{\frac{3}{4}} \leq \frac{1.1}{\frac{3}{4}}\right) \\ &= 2(1 - \Phi(4.4/3)) \quad (\text{após simplificações}) \end{aligned}$$

Amostra Casual Exercício 32. b)

(X_1, X_2, \dots, X_n) de $X \sim N(60, 9)$ ($\mu = 60, \sigma = 3$ & n -desconhecido).

Cálculo n

$$P(\bar{X} > 61.1 \vee \bar{X} < 58.9) < 0.05 \quad \bar{X} \sim N\left(60, \frac{9}{n}\right).$$

Probabilidade Dada

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 61.1 \vee \bar{X} < 58.9) < 0.05 &\Leftrightarrow P(|\bar{X} - 60| > 1.1) < 0.05 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{|\bar{X} - 60|}{\frac{3}{\sqrt{n}}} > \frac{1.1}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) < 0.05 \\ [P(|Z| \leq z) = 2(1 - \Phi(z))] &\Leftrightarrow 2(1 - \Phi(1.1\sqrt{n}/3)) < 0.05 \end{aligned}$$

Cálculo de $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 2(1 - \Phi(1.1\sqrt{n}/3)) < 0.05 &\Leftrightarrow 1 - \Phi(1.1\sqrt{n}/3) < 0.025 \\
 &\Leftrightarrow \Phi(1.1\sqrt{n}/3) > 0.975 \\
 &\Leftrightarrow 1.1\sqrt{n}/3 > q_{0.975} \\
 &\Leftrightarrow n > \left(\frac{3 \times q_{0.975}}{1.1}\right)^2
 \end{aligned}$$

Probabilidade Pedida em $R > 2*(1-pnorm(4.4/3))$

comando R $> (3 * qnorm(.975)/1.1)^2$

Output $[1] 28.57283$

Solução 32.b) $n = 29$

Amostra Casual Exercício 70.

- (X_1, X_2, \dots, X_6) de $X \sim U(0, 50)$ ($E(X) = 25$ & $V(X) = \frac{2500}{12}$) descreve o custo de manutenção de cada uma das seis (6) máquinas ao longo de uma (1) semana.
- $(C_1, C_2, \dots, C_{52})$ de $C = 6X$ descreve o custo de manutenção de 6 máquinas ao longo de uma (52) semanas.

Soma v.a.'s i.i.d.'s

- **Custo Semanal:** $C_i = \sum_{j=1}^6 X_j = 6\bar{X}$;
- **Custo Total:** $CT = \sum_{i=1}^{52} C_i = \sum_{i=1}^{52} 6\bar{X} = (52 \times 6)\bar{X} = 312\bar{X}$.

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

v.a. custo total ($312\bar{X} \sim N(312\mu, 312\sigma^2)$)

$$\mu = 25 \quad \& \quad \sigma = \frac{2500}{12} \quad \implies \quad CT = 312\bar{X} \sim N(7800, 65000)$$

Probabilidade Pedida

$$\begin{aligned} P(CT \leq 8000) &= P(312\bar{X} \leq 8000) \\ &\approx \Phi\left(\frac{8000 - 7800}{\sqrt{65000}}\right) \quad [\approx \Phi(0.7844645)]. \end{aligned}$$

32.b) > pnorm(q, mean, sd)

```
> pnorm(8000, 7800, sqrt(65000))
```

```
[1] 0.7836162
```

```
> pnorm(0.7844645)
```

```
[1] 0.7836162
```

Conteúdos

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado

Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos

Distribuição da média amostral

Distribuição da variância amostral [corrigida]

Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

- 1** Distribuições Contínuas
 - Distribuição do Qui-Quadrado
 - Distribuição t-Student
- 2** Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Função Geradora de Momentos
 - Distribuição da média amostral
 - Distribuição da variância amostral [corrigida]
 - Rácio de Student
- 3** Teorema do Limite Central
- 4** Exercícios Resolvidos
 - Distribuições Contínuas
 - Populações $N(\mu, \sigma^2)$
 - Teorema do Limite Central
- 5** Exercícios Extra-Aula

Estatística II

N. Faustino

Distribuições Contínuas

Distribuição do Qui-Quadrado
Distribuição t-Student

Populações $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de Momentos
Distribuição da média amostral
Distribuição da variância amostral [corrigida]
Rácio de Student

Teorema do Limite Central

Exercícios Resolvidos

Distribuições Contínuas
Populações $N(\mu, \sigma^2)$
Teorema do Limite

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

■ págs. 393-394: 30., 31., 38.

$$\sqrt{n-1} \frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$$

■ págs. 394: 37.

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

■ págs. 394: 39.



Exercícios Propostos

Complemento da Aula 12

Estatística II

N. Faustino

Distribuições
Contínuas

Distribuição do
Qui-Quadrado
Distribuição
t-Student

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Função Geradora de
Momentos

Distribuição da
média amostral
Distribuição da
variância amostral
[corrigida]

Rácio de Student

Teorema do
Limite Central

Exercícios
Resolvidos

Distribuições
Contínuas

Populações
 $N(\mu, \sigma^2)$

Teorema do Limite

Teorema do Limite Central

- págs. 341–343:
70., 72., 74., 77.



Murteira, B., C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta, F. Pimenta (2015), **Introdução à Estatística, 3ª Edição**, Escolar Editora.



Exercício 47., p. 397

Alguns comentários:

- a) **Esta afirmação é sempre falsa**, para qualquer população $X \sim F$. Só seria verdadeira se substituíssemos $\frac{X_1+X_n}{2}$ por $E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right)$ (propriedade $E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_n) = E(X)$).
- b) **Esta afirmação é falsa** uma vez que $P(\bar{X}_1 \leq x) = P(n_1\bar{X}_1 \leq n_1x)$ e $P(\bar{X}_2 \leq x) = P(n_2\bar{X}_2 \leq n_2x)$ e $n_1 \neq n_2$ (amostras independentes dimensão n_1 resp. n_2). Uma condição suficiente seria $n_1 = n_2 = n$.
- c) **Obviamente verdadeira**, pela simetria de W relativamente à média $E(W) = 0$;
- d) Resposta encontra-se nos slides [Semana4.pdf](#);
- e) **Ignorar esta alínea.**

Teste os seus conhecimentos

Qui-Quadrado & t -Student

Aproximação t_k por $N(0, \sigma^2)$

Mostre que se $X \sim t_k$, então $\sqrt{\frac{k-2}{k}}X \sim N\left(0, \frac{k}{k-2}\right)$, para valores de $k \rightarrow \infty$.

Complementar a [Murteira et al. (2015), Exercícios 35-36, p.394-295]

Sejam $X \sim N(0, 2)$ e $Y \sim \chi^2(10)$.

- Verifique que $Z = \frac{X}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1) \implies Z^2 \sim \chi_1^2$.
- Para $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{10}}}$ determine k e t de modo a que $P(X/\sqrt{Y} \leq 1) = P(T \leq t)$.
- Determine c de modo a que $P(X < c\sqrt{Y}) = P(X/\sqrt{Y} < c) = 0.95$.